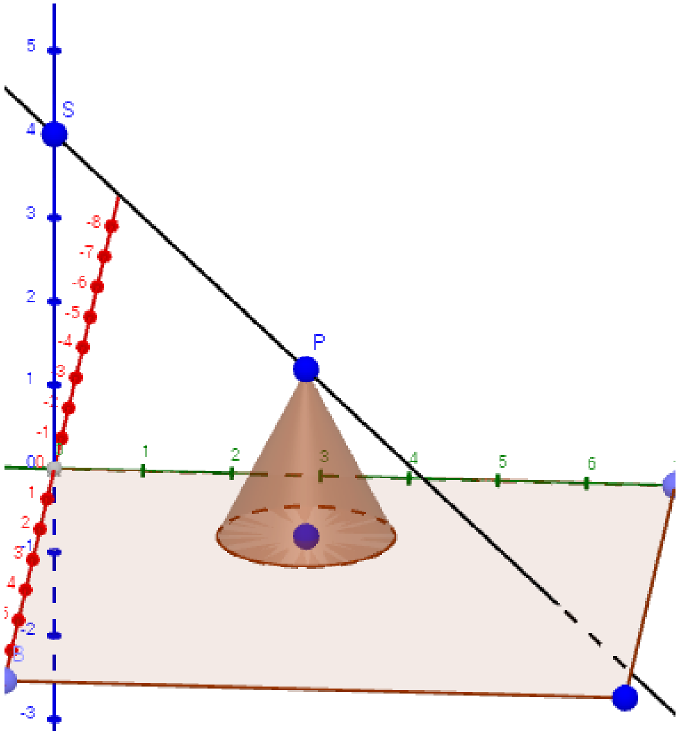
Lösungen zu Textaufgaben zu Ebenen und Geraden

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Rechenweg</th><th>Lösung</th></tr>
<tr>
<td>

1. Eine Lichtquelle sendet vom Standpunkt S 0/0/4) Lichtstrahlen aus. Berechnen Sie die Koordinaten des Schattens des Punktes P(2/3/2)!



</td>
<td>

$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *

Die Gleichung der x_1,x_2-Ebene lautet:

E: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Man berechnet nun den Durchstoßpunkt:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2r = s \\ 3r = t \\ 4 - 2r = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 = s \\ 3 \cdot 2 = t \\ r = 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} s = 4 \\ t = 6 \\ r = 2 \end{vmatrix}$

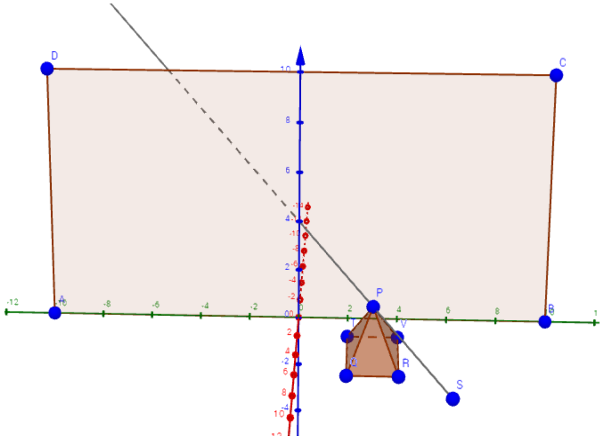
Man setzt r in g ein (oder s und t in E):

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

g durchstößt E In D(4/6/0)

* Verkürzung: Boden: $x_3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 2$; Danach setzt man r in g ein.

</td>
<td>Der Schattenpunkt hat die Koordinaten (4/6/0)</td>
</tr>
</table>

2. Eine Lampe sendet vom Punkt S(8/6/0) Lichtstrahlen auf die Spitze der Pyramide aus. Untersuchen Sie, ob der Schattenpunkt des Punktes P(4/3/2) auf eine Leinwand fällt, die entlang der x_2,x_3-Ebene aufgespannt wird und 10m hoch und 20m breit ist! 	$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ Die Gleichung der Geraden durch S und P lautet: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$* Die Gleichung der Ebene lautet z. B.: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}\ s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Man berechnet nun den Durchstoßpunkt: $\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix}8+4r=0\\6+3r=s\\-2r=t\end{matrix}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix}r=-2\\6+3\cdot(-2)=s\\-2\cdot(-2)=t\end{matrix}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{matrix}r=-2\\0=s\\4=t\end{matrix}\right\rvert$ Man setzt r in g ein (oder s und t in E): $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ g durchstößt E In D(0/0/4), da 4 < 10 ist, liegt D auf der Leinwand. *Verkürzung wie oben möglich	Der Schattenpunkt liegt auf der Leinwand, nämlich bei (0/0/4)

1. Ein Flugzeug landet am alten Flughafen in Hong Kong. Zur Zeit t = 0 ist es im Punkt P(5000/−3000/600). Man simuliert die Flugbahn durch eine Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$, r > 0 in Sekunden, alle Angaben in Metern. a. Wann und an welchem Punkt setzt das Flugzeug zuerst auf dem Boden auf, wenn es seine Flugbahn nicht ändern würde? b. 15 Sekunden nach dem Beginn der Flugroutenmessung muss das Flugzeug ein 200 m hohes Hochhaus überfliegen. Berechnen Sie, ob der Pilot seine Flugroute ändern muss!	a. Man berechnet den Durchstoßpunkt der Geraden mit der x_1,x_2-Ebene: Die Gleichung der x_1,x_2-Ebene lautet: $E: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$* $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} s = 5000 + 60r \\ t = -3000 + 60r \\ 0 = 600 - 30r \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} s = 5000 + 60 \cdot 20 \\ t = -3000 + 60 \cdot 20 \\ 20 = r \end{matrix} \right\rvert$ $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} s = 6200 \\ t = -1800 \\ 20 = r \end{matrix} \right\rvert$ Man setzt s und t in E ein (oder r in g): $\vec{x} = 6200 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1800) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6200 \\ -1800 \\ 0 \end{pmatrix}$ b. Man setzt r = 15: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5000 \\ -3000 \\ 600 \end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10900 \\ -2100 \\ 150 \end{pmatrix}$ *Verkürzung wie oben möglich	a. Das Flugzeug landet in 20 Sekunden im Punkt (6200/−1800/0) b. Da das Flugzeug eine Höhe von 150 Metern hat, muss es seine Route ändern.