Gegenseitige Lage von Geraden

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S. Gehen Sie zunehmend selbstständiger vor.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☐ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☐ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS):

(I) $4 - 1t =$ ____

(II) ____ $=$ ____

(III) ____ $=$ ____ $\Rightarrow$ t = ____ ; in (I): s = ____

Einsetzen von s = ____ und t = ____ in Gleichung (II) zur Kontrolle: ____

Das Gleichungssystem hat ____ Lösung.

Antwort: Die Geraden g und h sind also ____ .

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☐ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☐ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden:

gegebenenfalls Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes S:

Antwort:

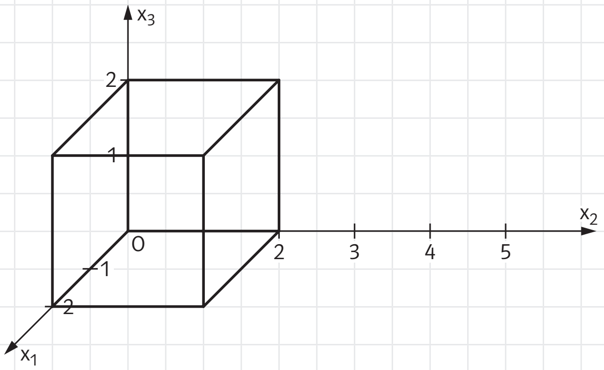
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☐ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☐ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden:

Antwort:

2.



Gegeben sind die Gleichungen der Geraden g_a und h.

g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Zeichnen Sie in die nebenstehende Zeichnung die Geraden g_0, g_2 und h ein.

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass sich die Geraden g und h schneiden.

(I) $0 + a \cdot s =$ ____

(II) $0 + 2 \cdot s =$ ____

(III) $2 - 2 \cdot s =$ ____

(II) + (III): ____ $\Rightarrow$ t = ____

in (II): ____ $\Rightarrow$ s = ____

in (I): ____ $\cdot$ a = ____ $\Rightarrow$ a = ____

c) Zeichnen Sie diese Gerade g_a in die Abbildung ein.

d) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an:

S (____ | ____ | ____).

Seite aus: Lambacher Schweizer Begleitmaterial
Analytische Geometrie und lineare Algebra
ISBN-13: 978-3-12-735713-4

Gegenseitige Lage von Geraden

Lösung

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S. Gehen Sie zunehmend selbstständiger vor.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☐ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☒ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS):

(I) $4 - 1t = 0 + 3s$

(II) $1 + 2t = -1 + 2s$

(III) $2 + 1t = 2$ $\Rightarrow$ $t = 0$; in (I): $s = \frac{4}{3}$

Einsetzen von $s = \frac{4}{3}$ und $t = 0$ in Gleichung (II) zur Kontrolle: $1 + 0 = -1 + \frac{8}{3}$ Widerspruch

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Antwort: Die Geraden g und h sind also windschief zueinander.

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}12\\1\\-10\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☐ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☒ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden:

(I) $2 + 0t = 12 + 4s$ $\Rightarrow$ $s = -2{,}5$

(II) $-2 + 1t = 1 + 0s$ $\Rightarrow$ $t = 3$

(III) $-2 - 1t = -10 - 2s$ Kontrolle mit (III): $-2 - 1\cdot(3) = -10 - 2\cdot(-2{,}5)$ ✓

gegebenenfalls Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes S:

t = 3 in Geradengleichung von g einsetzen: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-5\end{pmatrix}$

Antwort: Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt $S(2\,|\,1\,|-5)$.

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-8\\0\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\2\\0\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden g und h sind
- ☒ Vielfache voneinander, also parallel;
- ☐ keine Vielfachen voneinander, also nicht parallel.

Untersuchung auf gemeinsame Punkte der Geraden:

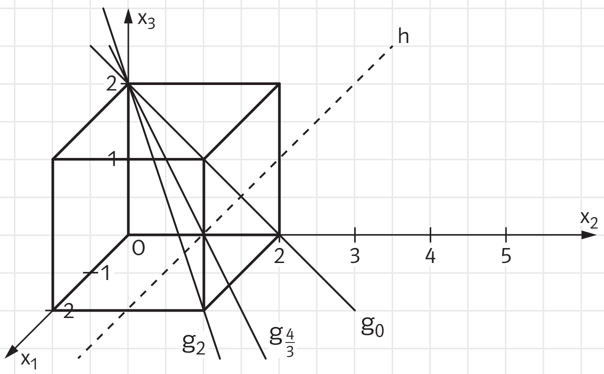
Liegt z. B. der Punkt $(-3\,|\,0\,|\,1)$ der Geraden g auch auf der Geraden h?

$$\left.\begin{array}{lll}(I) & -3 = 2 - 0{,}5s & \Rightarrow s = 10\\ (II) & 0 = 4 + 2s & \Rightarrow s = -2\end{array}\right\}\text{ Widerspruch}$$

(III) $1 = 1$

Antwort: Die Geraden g und h sind also parallel.

2.



Gegeben sind die Gleichungen der Geraden g_a und h.

g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}a\\2\\-2\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

a) Zeichnen Sie in die nebenstehende Zeichnung die Geraden g_0, g_2 und h ein.

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass sich die Geraden g und h schneiden.

(I) $0 + a\cdot s = 0 + 2t$

(II) $0 + 2\cdot s = 2 - 1t$

(III) $2 - 2\cdot s = 1 - 1t$

(II) + (III): $2 = 3 - 2t$ $\Rightarrow$ $t = \frac{1}{2}$

in (II): $2s = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $s = \frac{3}{4}$

in (I): $\frac{3}{4}\cdot a = 1$ $\Rightarrow$ $a = \frac{4}{3}$

c) Zeichnen Sie diese Gerade g_a in die Abbildung ein.

d) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an:
$S(1\,|\,1{,}5\,|\,0{,}5)$.

Seite aus: Lambacher Schweizer Begleitmaterial
Analytische Geometrie und lineare Algebra
ISBN-13: 978-3-12-735713-4